***Задание 1.*** Внутри треугольника взята точка. Сравните сумму расстояний от этой точки до вершин треугольника с его периметром.

Вначале можно измерить стороны конкретного треугольника АВС и найти периметр. Затем, взяв внутри произвольную точку М, найти сумму длин отрезков МА, МВ и МС. Полученные результаты измерений заносятся в таблицу. Сравнивая результаты двух последних столбцов этой таблицы, делают вывод: .

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *AB* | *BC* | *AC* | *AM* | *BM* | *CM* |  | *AM+BM+CM* |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Сделанный вывод позволяет учащимся сформулировать задачу на доказательство:

***Задача 1.*** Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри треугольника до его вершин меньше периметра этого треугольника.

Так как речь в задаче идёт о сравнении величин, полученных в результате измерения длин отрезков и сторон треугольника, то это позволяет связать решение задачи с темой «Неравенство треугольник».

В

М К

А С

Пусть в данном треугольнике *АВС* внутренняя точка *М* соединена с вершинами. Продолжим отрезок *АМ* до пересечения со стороной *ВС* в точке *К*.

Тогда для треугольника по неравенству треугольника будет справедливо неравенство , а для треугольника – неравенство . Учитывая эти неравенства, получим следующую цепочку:

.

Таким образом, доказали, что .

Так же доказывается, что и . Неравенства одинакового смысла можно складывать, тогда получим:

Отсюда вытекает, что , что и требовалось доказать.

***Замечание****.* Может показаться странным, что в этой задаче доказываются очевидные вещи: по рисунку же видно, что и, поэтому будет верно и неравенство . Однако математика требует строгого доказательства всех выдвигаемых гипотез. На интуицию, рисунок и веру при доказательстве математических утверждений опираться нельзя – выводы могут оказаться ложными.

Приведём пример задания на составление задачи, методика решения которой была бы в целом похожа на методику решения предыдущего задания.

***Задание 2.*** Составьте задачу, взяв в качестве её объектов четырёхугольник и середины его сторон.

***Задача2.*** Докажите, что середины сторон четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

Приведём пример алгебраического задания на составление задач, который был предложен учащимся 7 класса.

***Задание 3.*** Найдите, при каком условии сумма двух чисел рана их произведению.

Вначале приведём примеры таких пар чисел:

.

Если обозначить искомые числа через х и у, то задача на языке алгебры будет сформулирована следующим образом:

***Задача 3.*** Найдите условие, при котором .

Выразим одну переменную величину, например, у, через другую, в данном случае через х. Для этого выполним последовательно преобразования:

.

Таким образом, если одно число *x* а другое , то сумма этих чисел буде равна их произведению:

Учащиеся могут самостоятельно составить и решить другие задачи, методика решения которых аналогична предыдущей:

***Задача 4.*** Найдите такие пары чисел, разность которых равна их произведению.

***Задача 5.*** Найдите такие пары чисел, частное и сумма которых равны.

Приведём пример задания, которое было предложено учащимся 9 класса при изучении темы «Математическая индукция».

***Задание 4.*** Докажите, используя метод математической индукции, что для любого натурального числа *n* справедливо равенство:

**а)**;

**б)**;

**в)**.

После доказательства этих трёх равенств перед учащимися ставится проблема: можно ли составить равенства, аналогичные рассмотренным? Для этого необходимо заметить закономерность образования слагаемых левой части и результата суммы – правой. Учащимися было замечено следующее. Числитель правой части равен числу слагаемых левой части. Первый множитель знаменателя первых слагаемых равен первому множителю знаменателя правой части, а второй множитель – второму множителю знаменателя последнего слагаемого левой части. Поэтому можно сформулировать задание в общем виде:

***Задание 4\****. Докажите, используя метод математической индукции, что справедливо равенство:

,

где .

***Замечание.*** Истинность этих равенств, как и общей формулы, можно доказать без использования метода математической индукции, представляя каждое слагаемое в виде разности двух дробей, умноженной на постоянный для данного равенства множитель.Например, задание 4 под буквой б) можно решить так:

.

Решение одной и той же задачи различными методами – это один видов исследовательской работы.

Следующее задание было предложено учащимся 10 класса при изучении темы «Модуль действительного числа».

***Задание 5.*** Решите неравенство с модулем:

а) ; б) ;

в) ; г) .

Эти неравенства отличаются лишь коэффициентами и поэтому их можно решать одним и тем же методом. В методической литературе существует несколько подходов к решению таких неравенств. Одним из таких методов является метод, опирающийся непосредственно на определение абсолютной величины числа. Решим первое из этих неравенств.

Неравенство равносильно совокупности двух систем, решая которую последовательно получим:

или

или

или

или

Решением первой системы будет

-5 0 1 промежуток [0; 1).

Решением второй системы будет

-5 -10 промежуток (-1; 0].

Решением исходного неравенства будет объединение этих промежутков, т.е. промежуток (–1; 1).

Неравенства задания 5 были предложены в самостоятельной работе, но в билетах разных вариантов. Было обращено внимание учащихся на то, что хотя неравенства были различные, ответы у всех оказались одинаковыми. Учащимся было предложено самостоятельно составить задание в общем виде, решением которого был бы промежуток (–1; 1). Проанализировав условие всех четырёх неравенств, они пришли к выводу, что общий вид неравенства должно быть такой: .

В качестве задания исследовательского характера можно предложить такое: выясните, как изменится ответ при решении неравенства , если вместо *k* поставить: а) – *k*; б) 3*k*; в) *mk*.