***Задание 1.*** Внутри треугольника взята точка. Сравните сумму расстояний от этой точки до вершин треугольника с его периметром.

Вначале можно измерить стороны конкретного треугольника АВС и найти периметр. Затем, взяв внутри произвольную точку М, найти сумму длин отрезков МА, МВ и МС. Полученные результаты измерений заносятся в таблицу. Сравнивая результаты двух последних столбцов этой таблицы, делают вывод: $P\_{∆ABC}>MA+MB+MC$.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *AB* | *BC* | *AC* | *AM* | *BM* | *CM* | $$P\_{∆ABC}$$ | *AM+BM+CM* |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Сделанный вывод позволяет учащимся сформулировать задачу на доказательство:

***Задача 1.*** Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри треугольника до его вершин меньше периметра этого треугольника.

Так как речь в задаче идёт о сравнении величин, полученных в результате измерения длин отрезков и сторон треугольника, то это позволяет связать решение задачи с темой «Неравенство треугольник».

 В

 М К

 А С

Пусть в данном треугольнике *АВС* внутренняя точка *М* соединена с вершинами. Продолжим отрезок *АМ* до пересечения со стороной *ВС* в точке *К*.

Тогда для треугольника $ABK$ по неравенству треугольника будет справедливо неравенство $AB+BK>AK$, а для треугольника $MKC$ – неравенство $MK+KC>MC$. Учитывая эти неравенства, получим следующую цепочку:

$$AB+BC= AB+\left(BK+KC\right)>AK+KC=\left(AM+MK\right)+KC=$$

$=AM+\left(MK+KC\right)>AM+MC$.

Таким образом, доказали, что $AB+BC>AM+MC$.

Так же доказывается, что $AB+AC>BM+MC$ и $BC+AC>BM+AM$. Неравенства одинакового смысла можно складывать, тогда получим:

$$ AB+BC>AM+MC$$

$$ + AB+AC>BM+MC$$

$$ BC+AC>BM+AM $$

$$ 2(AB+BC+AC)>2(CM+BM+AM)$$

Отсюда вытекает, что $AB+BC+AC>CM+BM+AM$, что и требовалось доказать.

***Замечание****.* Может показаться странным, что в этой задаче доказываются очевидные вещи: по рисунку же видно, что $BA>MA$и$BC>MC$, поэтому будет верно и неравенство $AB+BC>AM+MC$. Однако математика требует строгого доказательства всех выдвигаемых гипотез. На интуицию, рисунок и веру при доказательстве математических утверждений опираться нельзя – выводы могут оказаться ложными.

Приведём пример задания на составление задачи, методика решения которой была бы в целом похожа на методику решения предыдущего задания.

***Задание 2.*** Составьте задачу, взяв в качестве её объектов четырёхугольник и середины его сторон.

***Задача2.*** Докажите, что середины сторон четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

Приведём пример алгебраического задания на составление задач, который был предложен учащимся 7 класса.

***Задание 3.*** Найдите, при каком условии сумма двух чисел рана их произведению.

Вначале приведём примеры таких пар чисел:

$2+2=2∙2; 3+1\frac{1}{2}=3∙1\frac{1}{2}; 11+1,1=11∙1,1; 21+1\frac{1}{20}=21∙1\frac{1}{20}$.

Если обозначить искомые числа через х и у, то задача на языке алгебры будет сформулирована следующим образом:

***Задача 3.*** Найдите условие, при котором $x+y=x∙y$.

Выразим одну переменную величину, например, у, через другую, в данном случае через х. Для этого выполним последовательно преобразования:

$x+y=x∙y; x=y\left(x-1\right); y=\frac{x}{x-1}$.

Таким образом, если одно число *x* а другое $\frac{x}{x-1}$ , то сумма этих чисел буде равна их произведению: $x+\frac{x}{x-1}=x∙\frac{x}{x-1}.$

Учащиеся могут самостоятельно составить и решить другие задачи, методика решения которых аналогична предыдущей:

***Задача 4.*** Найдите такие пары чисел, разность которых равна их произведению.

***Задача 5.*** Найдите такие пары чисел, частное и сумма которых равны.

Приведём пример задания, которое было предложено учащимся 9 класса при изучении темы «Математическая индукция».

***Задание 4.*** Докажите, используя метод математической индукции, что для любого натурального числа *n* справедливо равенство:

**а)**$\frac{1}{1∙3}+\frac{1}{3∙5}+\frac{1}{5∙7}+…+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$;

**б)**$\frac{1}{2∙7}+\frac{1}{7∙12}+\frac{1}{12∙17}+…+\frac{1}{(5n-3)(5n+2)}=\frac{n}{2(5n+2)}$;

**в)**$\frac{1}{3∙7}+\frac{1}{7∙11}+\frac{1}{11∙15}+…+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}=\frac{n}{3(4n+3)}$.

После доказательства этих трёх равенств перед учащимися ставится проблема: можно ли составить равенства, аналогичные рассмотренным? Для этого необходимо заметить закономерность образования слагаемых левой части и результата суммы – правой. Учащимися было замечено следующее. Числитель правой части равен числу слагаемых левой части. Первый множитель знаменателя первых слагаемых равен первому множителю знаменателя правой части, а второй множитель – второму множителю знаменателя последнего слагаемого левой части. Поэтому можно сформулировать задание в общем виде:

***Задание 4\****. Докажите, используя метод математической индукции, что справедливо равенство:

$\frac{1}{a∙(a+d)}+\frac{1}{(a+d)∙(a+2d)}+\frac{1}{(a+2d)∙(a+3d)}+…+\frac{1}{\left(a+d\left(n-1\right)\right) ∙ (a+dn)}=\frac{n}{a(a+dn)}$,

где $a\in N, d\in Z, n\in N$.

***Замечание.*** Истинность этих равенств, как и общей формулы, можно доказать без использования метода математической индукции, представляя каждое слагаемое в виде разности двух дробей, умноженной на постоянный для данного равенства множитель.Например, задание 4 под буквой б) можно решить так:

$$\frac{1}{2∙7}+\frac{1}{7∙12}+\frac{1}{12∙17}+…+\frac{1}{\left(5n-3\right)\left(5n+2\right)}=$$

$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{12}+\frac{1}{12}-\frac{1}{17}+…+\frac{1}{\left(5n-3\right)}-\frac{1}{(5n+2)}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(5n+2)}\right)=\frac{n}{2(5n+2)}$.

Решение одной и той же задачи различными методами – это один видов исследовательской работы.

Следующее задание было предложено учащимся 10 класса при изучении темы «Модуль действительного числа».

***Задание 5.*** Решите неравенство с модулем:

а) $\left|x^{2}+5x\right|<x+5$; б) $\left|x^{2}+2x\right|<x+2$;

в) $\left|x^{2}+3x\right|<x+3$; г) $\left|x^{2}+4x\right|<x+4$.

Эти неравенства отличаются лишь коэффициентами и поэтому их можно решать одним и тем же методом. В методической литературе существует несколько подходов к решению таких неравенств. Одним из таких методов является метод, опирающийся непосредственно на определение абсолютной величины числа. Решим первое из этих неравенств.

Неравенство$\left|x^{2}+5x\right|<x+5$ равносильно совокупности двух систем, решая которую последовательно получим:

$\left\{\begin{array}{c}x^{2}+5x\geq 0, \\ x^{2}+5x<x+5;\end{array}\right.$или$\left\{\begin{array}{c}x^{2}+5x<0, \\-x^{2}-5x<x+5;\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{c}x(x+5)\geq 0, \\ x^{2}+4x-5<0;\end{array}\right.$или$\left\{\begin{array}{c}x(x+5)<0, \\ x^{2}+6x+5>0;\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{c}x(x+5)\geq 0, \\x^{2}+4x-5<0;\end{array}\right.$или$\left\{\begin{array}{c}x(x+5)<0, \\ x^{2}+6x+5>0;\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{c} x\leq -5 или x\geq 0, \\-5<x<1;\end{array}\right.$или$\left\{\begin{array}{c}-5<x<0, \\ x<-5 или x>-1.\end{array}\right.$

 Решением первой системы будет

-5 0 1 промежуток [0; 1).

 Решением второй системы будет

-5 -10 промежуток (-1; 0].

Решением исходного неравенства будет объединение этих промежутков, т.е. промежуток (–1; 1).

Неравенства задания 5 были предложены в самостоятельной работе, но в билетах разных вариантов. Было обращено внимание учащихся на то, что хотя неравенства были различные, ответы у всех оказались одинаковыми. Учащимся было предложено самостоятельно составить задание в общем виде, решением которого был бы промежуток (–1; 1). Проанализировав условие всех четырёх неравенств, они пришли к выводу, что общий вид неравенства должно быть такой: $\left|x^{2}+kx\right|<x+k$.

В качестве задания исследовательского характера можно предложить такое: выясните, как изменится ответ при решении неравенства $\left|x^{2}+kx\right|<x+k$, если вместо *k* поставить: а) – *k*; б) 3*k*; в) *mk*.