***Задача 1.*** О делении квадратов нечётных чисел на 8.

Эта задача рассматривалась на уроке алгебры в 8 классе при изучении темы «Делимость чисел». Выпишем квадраты первых пяти нечётных чисел и найдём остатки от деления этих чисел на 8. Замечаем, что числа $3^{2}, 5^{2}, 7^{2}, 9^{2}, 11^{2}$ при делении на 8 дают в остатке 1. Высказывается гипотеза, что квадрат любого нечётного числа при делении на 8 будет давать в остатке 1. Действительно, пусть дано некоторое нечётно число $ m=2k+1$. Тогда $m^{2}=4k^{2}+4k+1=4k\left(k+1\right)+1$. Из двух последовательных натуральных чисел *k*и $k+1$ одно обязательно чётное, значит, произведение двух последовательных натуральных чисел делится на 2, и поэтому $4k\left(k+1\right)$ делится на 8. Следовательно, $m^{2}$ можно записать в виде $m^{2}=8p+1$. А эта запись означает, что квадрат нечётного числа при делении на 8 даёт в остатке 1. Что и требовалось доказать.

***Задача 2.*** Обобщая формулу Герона для вычисления площади треугольника, индийский математик и астроном Брахмагупта (598-660 гг. н.э.) высказал утверждение, которое в принятых сейчас обозначениях может быть сформулировано так: «Площадь любого выпуклого четырёхугольника выражается через длины его сторон по формуле $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$где *р* – полупериметр, $a, b, c, d$– длины сторон этого четырёхугольника. Для квадрата и прямоугольника это утверждение оказывается справедливым (этопроверяется несложно). Однако в общем случае эта формула будет неверна. Так, например, площадь ромба независимо от величины острого угла будет равна $a^{2}$, т.е. будет равна площади квадрата, что, конечно, неверно.

***Задача 3.***Треугольник считается вписанным в прямоугольник, если на каждой стороне прямоугольника (или в конце этой стороны) находится хотя бы одна вершина треугольника.

Опишем около правильного треугольника прямоугольник так, чтобы основание треугольника совпало с основанием прямоугольника. Сравнивая площади этих фигур, делаем вывод: «Прямоугольник, описанный около правильного треугольника, имеет вдвое большую площадь, чем этот треугольник».

Будет ли это утверждение верно для любого случая расположения вершин правильного треугольника? Оказывается, нет. Так, если только одна вершина треугольника будет совпадать с вершиной прямоугольника, то утверждение будет ложно.

C

 M L

D FPB

 A K

Докажем это. Пусть только одна вершина – вершина *А* – треугольника совпадает с вершиной прямоугольника, а вершина *В* лежит на стороне *KL*, вершина *С* – на стороне *ML*. Проведём *BD*⏊*AM*, *CP*⏊*BD*, при этом $P∊BD$, $F=BD∩AC$. Тогда получим следующие неравенства: $S\_{∆AFB}<\frac{1}{2}∙S\_{AKBD}$, $S\_{∆FCB}<\frac{1}{2}∙S\_{DBLM}$. Так как площадь всего треугольника АВС равна сумме площадей рассмотренных треугольников AFBи FBC, а неравенства одинакового смысла можно складывать, то получим:

$S\_{∆ABC}=S\_{∆AFB}+S\_{∆FCB}<\frac{1}{2}∙S\_{AKBD}+\frac{1}{2}∙S\_{DBLM}=\frac{1}{2}∙S\_{AMLK}$, т.е. площадь равностороннего треугольника, вписанного в прямоугольник, будет меньше площади этого прямоугольника. Результат решения этого примера опровергает высказанное утверждение. Гипотеза оказалась ложной.